WAGENINGEN UNIVERSITEIT
WISKUNDE (BIOMETRIS)

Examen Wiskunde M (MAT-12806)
dinsdag 25 oktober 2005, 9.00-12.00 uur

N.B.

1. Het examen bestaat uit 6 opgaven.
2. **U dient elk antwoord volledig toe te lichten.**
3. De cijfers tussen haakjes geven de maximale waardering aan.
4. **Vul het examenregistratie-formulier in.**
5. **Schrijf bovenaan ieder vel dat u inlevert:**
   - **uw naam en voorletters,**
   - **uw registratienummer,**
   - **uw opleiding.**
6. **Leg uw collegekaart klaar. U mag de zaal niet voor 9^{30} verlaten en ook niet voordat het examenregistratie-formulier is gecontroleerd en ingenomen.**
7. Uitsluitend het formuleblad uit de Handleiding Wiskunde M mag worden geraadpleegd.
8. Er wordt naar gestreefd de uitslag van het examen bekend te maken uiterlijk in week 10. U kunt uw cijfer inzien via onderwijsnet (http://csa.wur.nl).
   De tijd en plaats van de inzage van het examenwerk zullen worden bekendgemaakt via de workplace van Wiskunde M (https://edu3.web.wur.nl/mat12806_2005_0).

SUCCES

Opgave 1.

Drie supermarktconcerns P, Q en R hebben de markt in een stad in handen. Als gevolg van een prijzenslag treedt er klantenwisseling op tussen deze supermarktconcerns.
De aantallen klanten van de supermarktconcerns aan het eind van maand t geven we aan met respectievelijk $P(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$. Door de klantenwisseling verandert de verdeling van de aantallen klanten over de supermarktconcerns elke maand volgens $x(t+1)=Ax(t)$ met

$$x(t)=\begin{pmatrix}P(t)\\Q(t)\\R(t)\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A=\begin{array}{c} \\ P\\ Q\\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array}\\ \begin{pmatrix}0.6 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.8 & 0.1\\0.2 & 0.1 & 0.8\end{pmatrix}\end{array} \text{; verder is } x(0)=\begin{pmatrix}6000\\2000\\2000\end{pmatrix}.$$

(2) *a)* Bereken $x(1)$ en $x(2)$. $\begin{pmatrix}0,6 & 0,1 & 0,1\\0,2 & 0,8 & 0,1\\0,2 & 0,1 & 0,8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6000\\2000\\2000\end{pmatrix}=x_1$ uitkomst × matrix = x2

(2) *b)* Wat is de betekenis van het getal 0.6 in matrix A? 60% van supermarkt P blijft bij P
En wat is de betekenis van het getal 0.2 linksonder in matrix A? 20% verschuift

(2) *c)* Laat zien, dat de vectoren $u=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 1, $v=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ 0,5 en $w=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 0,7 eigenvectoren zijn van A. Bepaal de bijbehorende eigenwaarden. matrix $M\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}=\lambda$

(2) *d)* Op den duur gaat de verdeling van de aantallen klanten over de supermarktconcerns steeds meer lijken op een stabiele verdeling. Hoeveel klanten heeft elk van de supermarktconcerns bij die stabiele verdeling? kijk naar de dominant. $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 20% 40% 40%

(3) *e)* Bereken *met gebruikmaking van de eigenwaarden en eigenvectoren* van matrix A hoeveel klanten elk van de supermarktconcerns heeft na 7 maanden.

4.6 / 4

$1^7\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+0,5^7\beta\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+0,7^7\gamma\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ uit te rekenen ... $\alpha+2\beta=6000$ $\beta=2000$

Opgave 2.

Het vergaat supermarktconcern P uit opgave 1 niet goed in de beschreven situatie. Door een nieuwe marktstrategie tracht het concern vanaf nu zijn klanten beter aan zich te binden. Als gevolg van dit nieuwe beleid verandert de verdeling van de aantallen klanten over de supermarktconcerns per maand voortaan volgens $x(t+1)=Bx(t)$ met

$$B=\begin{pmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.8 & 0.1\\0.1 & 0.1 & 0.8\end{pmatrix}.$$

$0,8v_1 \quad 0,1v_2 \quad 0,1v_3=1v_1$
$0,1v_1 \quad 0,8v_2 \quad 0,1v_3=1v_2$
$0,1v_1 \quad 0,1v_1 \quad 0,8v_3=1v_3$

$-0,2v_1 \quad 0,1v_2 \quad 0,1v_3=0$
$0,1v_1 \quad 0,2v_2 \quad 0,1v_3=0$
$0,1v_1 \quad 0,1v_2 \quad -0,2v_3=0$

Matrix B heeft een eigenwaarde 1.

(2) *a)* Bepaal een eigenvector van B bij de eigenwaarde 1. Je mag (naar keuze) deze eigenvector zelf berekenen of afleiden uit bijgaand met Derive verkregen resultaat.

Derive-resultaat:	
#15:	`EXACT_EIGENVECTOR(B, 1)`
#16:	`[@13, @13, @13]`

Welk gedeelte van de klanten krijgt supermarktconcern P nu op den duur? 0.33 0.33 0.33
Als dit gelijk is, en ew = 1, is dan altijd alles 0,33%?

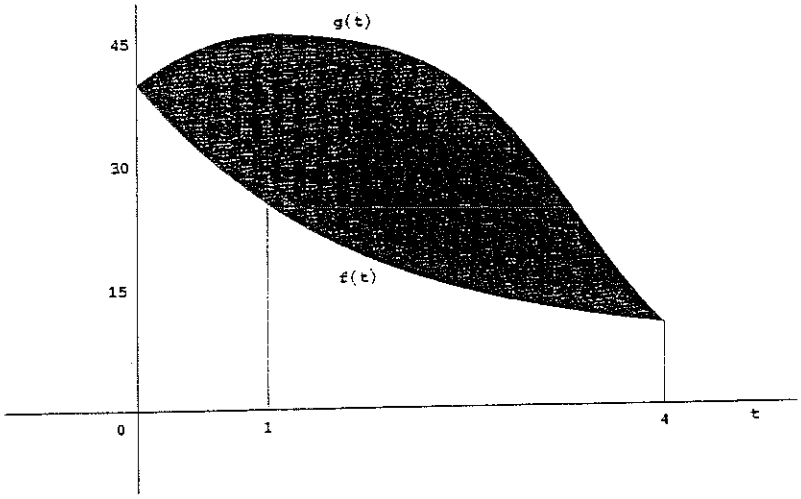
Matrix B heeft ook een eigenwaarde 0.7.

(3) *b)* Bereken de eigenvectoren van B bij de eigenwaarde 0.7. zelfde maar dan met 0,7

$0,8v_1 \quad 0,1v_2 \quad 0,1v_3=0,7$ etc

Opgave 6.

In *Human Geography, Issues for the 21st century* (Peter Daniels e.a., 2001) wordt een zogeheten demografisch transitiemodel beschreven, waarbij het sterftecijfer in een land gedurende een periode sterk afneemt, terwijl het geboortecijfer aanvankelijk hoog blijft en pas in een later stadium afneemt tot het niveau van het sterftecijfer. Dit proces leidt tot een sterke toename van de bevolking.



De bovenstaande figuur is gebaseerd op het genoemde boek. In de figuur zijn de functies $f(t)$ en $g(t)$ de aantallen sterfgevallen respectievelijk geboorten per 1000 inwoners per jaar tussen $t = 0$ en $t = 4$, met t uitgedrukt in eenheden van 10 jaar. Er geldt:

$$f(t) = 33\mathrm{e}^{-0.6t} + 7 \qquad \text{voor } 0 \le t \le 4,$$

$$g(t) = \begin{cases} -6t^2 + 12t + 40 & \text{voor } 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{37200\mathrm{e}^{-2t}}{1 + 800\mathrm{e}^{-2t}} & \text{voor } 1 \le t \le 4. \end{cases}$$

(3) *a)* Bereken de integralen $\int_0^1 -6t^2 + 12t + 40 \, \mathrm{d}t$ en $\int_0^4 33\mathrm{e}^{-0.6t} + 7 \, \mathrm{d}t$ exact, en ga na dat de uitkomsten gelijk zijn aan respectievelijk 44 en 78.01 .

(3) *b)* Bereken $\int_1^4 \dfrac{37200\mathrm{e}^{-2t}}{1 + 800\mathrm{e}^{-2t}} \, \mathrm{d}t$ exact, en ga na dat de uitkomst gelijk is aan 103.60 .

(1) *c)* Bereken met behulp van de uitkomsten van de vragen *a* en *b* de toename van de bevolking per 1000 inwoners tussen $t = 0$ en $t = 4$ ten gevolge van sterfte en geboorte.