

Examen Wiskunde M (MAT-12806)
dinsdag 26 oktober 2004, 9.00-12.00 uur

N.B.

1. Het examen bestaat uit 6 opgaven.
2. **U dient elk antwoord volledig toe te lichten.**
3. De cijfers tussen haakjes geven de maximale waardering aan.
4. **Vul het examenregistratie-formulier in.**
5. **Schrijf bovenaan ieder vel dat u inlevert:**
 - uw naam en voorletters,
 - uw registratienummer,
 - uw opleiding.
6. **Leg uw collegekaart klaar. U mag de zaal niet voor 9³⁰ verlaten en ook niet voordat het examenregistratie-formulier is gecontroleerd en ingenomen.**
7. Uitsluitend het formuleblad uit de Handleiding Wiskunde M mag worden geraadpleegd.
8. Er wordt naar gestreefd de uitslag van het examen bekend te maken uiterlijk in week 10. U kunt uw cijfer inzien via onderwijsnet (<http://csa.wur.nl>). De tijd en plaats van de inzage van het examenwerk zullen worden bekendgemaakt via de workplace van Wiskunde M (https://edu3.web.wur.nl/mat12806_2004_1).

SUCCES

Opgave 1.

In landen als Indonesië, de Filipijnen of Brazilië vindt intensieve exploitatie van de bossen plaats. Hierdoor kan bos bijvoorbeeld overgaan in grasland of kaal gebied.

We beschouwen een model waarbij een gebied is ingedeeld in drie typen: "bewoond gebied" (W), "bebost gebied" (B) en "ander gebied" (A). De percentages die W, B en A in periode t beslaan van het totale gebied geven we aan met respectievelijk $W(t)$, $B(t)$ en $A(t)$. We veronderstellen dat de verdeling van het gebied over de drie gebiedstypen per periode van 5 jaar verandert volgens $p(t+1) = Mp(t)$ met

$$p(t) = \begin{pmatrix} W(t) \\ B(t) \\ A(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}; \quad \text{verder is} \quad p(0) = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

- (1) a) Bereken $p(1)$.
- (2) b) Wat is de betekenis van de getallen 0.9 en 0.1 in matrix M ?
- (2) c) Laat zien, dat de vectoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eigenvectoren zijn van M . Bepaal de bijbehorende eigenwaarden.

De eigenwaarden van M voldoen aan de vergelijking:

$$(1 - \lambda)(\lambda - 0.9)(\lambda - 0.8) = 0.$$

- (2) d) Leid deze vergelijking af. Wat is de derde eigenwaarde van matrix M ?
- (2) e) Welk percentage beslaat het beboste gebied volgens deze veronderstellingen op den duur van het totale gebied? Verklaar je antwoord.

Opgave 2.

In reactie op de grootschalige ontbossing vindt in veel landen herbebossing plaats. We veronderstellen nu dat in het model van opgave 1 de verdeling van het gebied over de drie gebiedstypen W, B en A per periode van 5 jaar verandert volgens $p(t+1) = Np(t)$ met

$$N = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad p(0) = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

- (1) a) Aan welk getal in matrix N kun je zien dat er bebost gebied bij komt?

Je mag bij de volgende vraag gebruikmaken van bijgaand met Derive verkregen resultaat.

- (5) b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van matrix N , en bereken met behulp hiervan welk percentage elk van de drie gebiedstypen op den duur van het totale gebied beslaat.

Derive-resultaat:

#3: DET(N - λ ·I)

$$\#4: \frac{(1 - \lambda) \cdot (10 \cdot \lambda^2 - 17 \cdot \lambda + 7)}{10}$$

$$\#5: \text{FACTOR} \left(\frac{(1 - \lambda) \cdot (10 \cdot \lambda^2 - 17 \cdot \lambda + 7)}{10}, \text{Rational}, \lambda \right)$$

$$\#6: \frac{(\lambda - 1) \cdot (7 - 10 \cdot \lambda)}{10}$$

Opgave 5.

De functie $f(x, y)$ is gedefinieerd door

$$f(x, y) = xy^2 - y^2 + 2x^2 - 8x + 1.$$

- (3) a) Bepaal de partiële afgeleiden $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$, en laat zien dat het punt $(2, 0)$ een stationair punt is van $f(x, y)$.
 (2) b) Bepaal de overige twee stationaire punten van $f(x, y)$.
 (2) c) Bepaal de aard en de grootte van $f(x, y)$ in het stationaire punt $(2, 0)$.

De productieomvang van een bedrijf bij inzet van x eenheden arbeid en y eenheden kapitaal, wordt gegeven door $16x^{0.25}y^{0.75}$. De kosten van x eenheden arbeid en y eenheden kapitaal worden gegeven door $2x + 12y$. Het bedrijf heeft een budget 144.

- (4) d) Bereken de maximale productieomvang van het bedrijf gegeven het budget 144.

Opgave 6.

Het aantal inwoners van een stad groeit. De functie

$$y(t) = 100\,000 - 30\,000 e^{-0.1t} \quad (t \text{ in jaren, } 0 \leq t \leq 20)$$

geeft een goede beschrijving van het aantal inwoners van de stad op tijdstip t .

- (2) a) Bereken de integraal $\frac{1}{20} \int_0^{20} y(t) dt$ exact, en ga na dat de uitkomst (afgerond) gelijk is aan 87030.
 (1) b) Geef een interpretatie van de uitkomst in vraag a (gerelateerd aan het aantal inwoners van de stad).

$$y'(t) = 0,4 (30000 - y(t))$$

$$\frac{y'(t)}{30000 - y(t)} = 0,4$$

$$\frac{y'(t)}{30000 - y(t)} = \int 0,4 dt$$

$$\int \frac{y'(t)}{30000 - y(t)} = \int 0,4 dt$$

$$\ln(30.000 - y(t)) = e^{-0,4 t}$$

$$e^{\ln(30.000 - y(t))} = C e^{-0,4 t}$$

$$y(t) = 30.000 - C e^{-0,4 t}$$

$$y(0) = 20.000$$

$$y(0) = 30.000 - 20.000 = C = 10.000$$

$$y(t) = 30.000 - 10.000 \cdot e^{-0,4 t}$$