WAGENINGEN UNIVERSITEIT
WISKUNDE (BIOMETRIS)

Examen Wiskunde M (MAT-12806)
dinsdag 27 oktober 2009, 9.00-12.00 uur

N.B.

1. Het examen bestaat uit 5 opgaven.
2. **U dient elk antwoord volledig toe te lichten.**
3. De cijfers tussen haakjes geven de maximale waardering aan.
4. **Vul het examenregistratie-formulier in.**
5. **Schrijf bovenaan ieder vel dat u inlevert:**
   - **uw naam en voorletters,**
   - **uw registratienummer,**
   - **uw opleiding.**
6. **Leg uw collegekaart klaar. U mag de zaal niet voor 9^{30} verlaten en ook niet voordat het examenregistratie-formulier is gecontroleerd en ingenomen.**
7. Uitsluitend het formuleblad uit de Handleiding Wiskunde M mag worden geraadpleegd.
8. Er wordt naar gestreefd de uitslag van het examen bekend te maken uiterlijk in week 10. U kunt uw cijfer inzien via http://csa.wur.nl .
   De tijd en plaats van de inzage van het examenwerk zullen worden bekendgemaakt via de Blackboard van Wiskunde M.

Opgave 1.

In $\mathbf{R}^4$ zijn gegeven de vectoren a, b, c, p:

$$a=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}8\\8\\4\\0\end{pmatrix}$$

en de deelruimte $U=\langle a,b,c\rangle$.

(2) ***a)*** Bereken de lengte van de vector a en bepaal de hoek tussen de vectoren a en b.

(3) ***b)*** Onderzoek of de vectoren a, b, c onafhankelijk zijn.

(1) ***c)*** Bepaal een basis en de dimensie van $U=\langle a,b,c\rangle$.

(4) ***d)*** Bepaal de loodrechte projectie p_U van p op $U=\langle a,b,c\rangle$.

Opgave 2.

Sinds de invoering van de vrije energiemarkt kunnen huishoudens zelf kiezen bij welk energiebedrijf ze hun energie inkopen. We bestuderen een model waarbij in een gemeente drie energiebedrijven P, Q en R de markt in handen hebben. De aantallen huishoudens die aan het eind van jaar n hun energie inkopen bij P, Q en R geven we aan met respectievelijk $P(n)$, $Q(n)$ en $R(n)$. De verdeling van de aantallen huishoudens over de energiebedrijven verandert per jaar volgens $x(n+1)=Mx(n)$ met

$$x(n)=\begin{pmatrix}P(n)\\Q(n)\\R(n)\end{pmatrix}\quad \text{en}\quad M=\begin{pmatrix}0.8&0.2&0.1\\0.1&0.6&0.1\\0.1&0.2&0.8\end{pmatrix};\ \text{verder is}\ x(0)=\begin{pmatrix}7000\\2000\\1000\end{pmatrix}.$$

(2) ***a)*** Bereken $x(1)$.

(2) ***b)*** Wat is de betekenis van het getal 0.8 linksboven in matrix M?
En wat is de betekenis van het getal 0.1 linksonder in matrix M?

(3) ***c)*** Laat zien dat de vectoren $a=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ en $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ eigenvectoren zijn van M.

Bepaal de bijbehorende eigenwaarden.

Matrix M heeft ook een eigenwaarde 0.5.

(2) ***d)*** Bepaal een eigenvector c bij de eigenwaarde 0.5.

(2) ***e)*** Op den duur gaat de verdeling van de huishoudens over de energiebedrijven steeds meer lijken op een stabiele verdeling. Hoeveel huishoudens kopen dan hun energie in bij energiebedrijf P?

De beginverdeling $x(0)$ kan worden geschreven als $x(0)=\alpha a+\beta b$.

(3) ***f)*** Bereken *met behulp hiervan* aan het eind van welk jaar het aantal huishoudens dat bij P hun energie inkoopt voor het eerst minder dan 150 afwijkt van het uiteindelijke aantal. Je mag hierbij gebruik maken van onderstaand met Derive verkregen resultaat.

Derive-resultaat:

```
#18: SOLVE([2·α - 1·β = 7000, 1·α + 0·β = 2000, 2·α + 1·β = 1000], [α, β])

#19: [α = 2000 ∧ β = -3000]
```

Opgave 3.

Om de verspreiding van een griepepidemie onder de bevolking te beschrijven, hanteert een onderzoeker twee modellen. In beide modellen is $y(t)$ het percentage van de bevolking dat op tijd t (in maanden) ziek is of ziek is geweest.

In het eerste model wordt de ontwikkeling van $y(t)$ beschreven door:

$$y'(t) = 0.56\, y(t),$$
$$y(0) = 2.$$

(2) ***a)*** Bereken de groeisnelheid $y'(0)$. Bereken ook de relatieve groeisnelheid op tijdstip $t = 0$.

(3) ***b)*** Toon aan (met tussenstappen, en zonder gebruik te maken van een standaardoplossing) dat in dit model geldt $y(t) = 2\,e^{0.56t}$.

(1) ***c)*** Wat gebeurt er met $y(t)$ volgens dit model op den duur?
(Opmerking: dit model zal dus op den duur niet meer geldig zijn!)

In het tweede model wordt de ontwikkeling van $y(t)$ beschreven door:

$$y'(t) = 0.02\, y(t)(30 - y(t)),$$
$$y(0) = 2.$$

(1) ***d)*** Bereken ook voor dit tweede model de groeisnelheid $y'(0)$. Ga na of deze uitkomst gelijk is aan de waarde van $y'(0)$ in het eerste model, zie onderdeel *a*.

(3) ***e)*** Bepaal $y(t)$ voor het tweede model met behulp van de standaardoplossing (je kunt hiervoor het formuleblad raadplegen).

Opmerking. Als je deze vraag niet hebt kunnen oplossen, dan mag je bij het volgende onderdeel ook gebruik maken van de functie $y(t) = \dfrac{30}{1+12\,e^{-0.4t}}$.

(2) ***f)*** Hoe groot wordt $y(t)$ volgens het tweede model op den duur?
Bereken (langs algebraïsche weg) het tijdstip t waarop volgens het tweede model de griep op zijn hoogtepunt is, dat wil zeggen het tijdstip waarop de meeste mensen ziek worden.

ZIE VOLGENDE PAGINA

Opgave 4.

De functie $f(x, y)$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = x^2 y - 8xy + y^2 + 3 \ .$$

(3) *a)* Bepaal de partiële afgeleiden $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$, en laat zien dat het punt (8, 0) een stationair punt is van $f(x, y)$.

(2) *b)* Bepaal de overige stationaire punten van $f(x, y)$.

(2) *c)* Bepaal de aard en de grootte van $f(x, y)$ in het stationaire punt (8, 0).

De productieomvang van een bedrijf bij inzet van x eenheden arbeid en y eenheden kapitaal, wordt gegeven door de Cobb-Douglas productiefunctie $24\,x^{0.50}\,y^{0.25}$. De kosten van x eenheden arbeid en y eenheden kapitaal worden gegeven door $12x + 3y$. Het bedrijf heeft een budget 63.

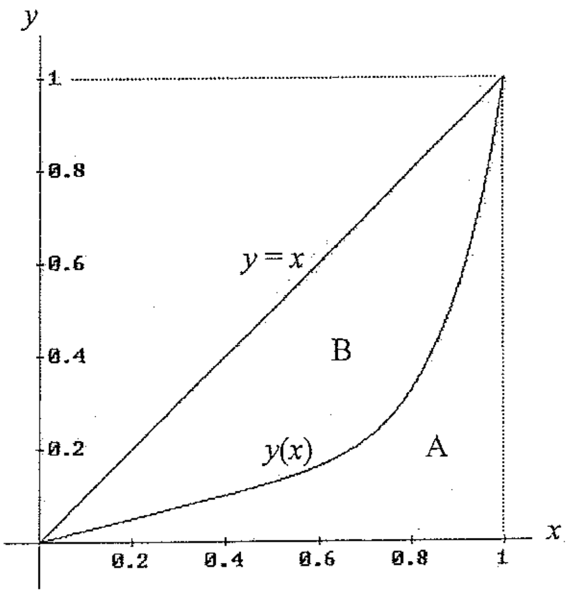
(3) *d)* Bereken (langs algebraïsche weg) bij welke inzet van arbeid en kapitaal de productieomvang van het bedrijf maximaal is, gegeven het budget 63.

Opgave 5.

Om ongelijkheid in de verdeling van landbezit in een gebied te beschrijven kan men gebruik maken van het zogeheten Ginigetal.
De verdeling van het landbezit onder de bevolking van het Nandi-district in Kenia kan bij benadering worden beschreven door de Lorentzkromme met vergelijking

$$y(x) = \tfrac{3}{4}x^8 + \tfrac{1}{4}x \qquad (0 \le x \le 1),$$

zie de figuur. De fractie x van de bevolking met het minste land heeft dan samen de fractie $y(x)$ van het totale land in bezit.



(2) *a)* Bereken (langs algebraïsche weg) de oppervlakte tussen de x-as en de Lorentzkromme $y(x)$ (dat is oppervlakte A in de figuur), en ga na dat deze (afgerond) gelijk is aan 0.208.

De oppervlakte tussen de Lorentzkromme en de diagonaal $y = x$ (dat is oppervlakte B in de figuur) is een maat voor de ongelijkheid in de verdeling van het landbezit in het Nandi-district.
Het Ginigetal wordt nu gedefinieerd als de verhouding tussen die oppervlakte en de totale oppervlakte tussen de x-as en de diagonaal (voor $0 \le x \le 1$).

(2) *b)* Bereken het Ginigetal voor de verdeling van het landbezit in het Nandi-district.

Opmerking: bovenstaande is gebaseerd op onderzoek in het Nandi-district door dr. P.G.M. Hebinck (leerstoelgroep Rurale ontwikkelingssociologie).