WAGENINGEN UNIVERSITEIT
WISKUNDE (BIOMETRIS)

Examen Wiskunde M (MAT-12806)
dinsdag 26 oktober 2010, 9.00-12.00 uur

N.B.

1. Het examen bestaat uit 6 opgaven.
2. **U dient elk antwoord volledig toe te lichten.**
3. De cijfers tussen haakjes geven de maximale waardering aan.
4. **Vul het examenregistratie-formulier in.**
5. **Schrijf bovenaan ieder vel dat u inlevert:**
   - **uw naam en voorletters,**
   - **uw registratienummer,**
   - **uw opleiding.**
6. **Leg uw collegekaart klaar. U mag de zaal niet voor 9^{30} verlaten en ook niet voordat het examenregistratie-formulier is gecontroleerd en ingenomen.**
7. Uitsluitend het formuleblad uit de Handleiding Wiskunde M mag worden geraadpleegd.
8. Er wordt naar gestreefd de uitslag van het examen bekend te maken uiterlijk in week 10. U kunt uw cijfer inzien via http://ssc.wur.nl .
   De tijd en plaats van de inzage van het examenwerk zullen worden bekendgemaakt via de Blackboard van Wiskunde M.

Opgave 1.

In $\mathbf{R}^4$ zijn gegeven de vectoren a, b, c, p:

$$a=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}4\\4\\3\\3\end{pmatrix}$$

en de deelruimte $U = \langle a,b,c \rangle$.

(2) ***a)*** Bereken de lengte van de vector a en bepaal de hoek tussen de vectoren a en b.

(3) ***b)*** Onderzoek of de vectoren a, b, c onafhankelijk zijn.

(2) ***c)*** Bepaal een basis en de dimensie van $U = \langle a,b,c \rangle$.

(4) ***d)*** Bepaal de loodrechte projectie p_U van p op $U = \langle a,b,c \rangle$.

Opgave 2.

Inzicht in de ontwikkeling van de leeftijdsopbouw van een bevolking is van belang voor de economie en de gezondheidszorg van een land. Om deze ontwikkeling te bestuderen maakt een onderzoeker gebruik van het volgende (op de biologie geïnspireerde) demografische model. In dit model is de bevolking opgedeeld in drie leeftijdsklassen:

$A(t)$ is het aantal 0- tot en met 29-jarigen in periode t,
$B(t)$ is het aantal 30- tot en met 59-jarigen in periode t,
$C(t)$ is het aantal 60-jarigen en ouder in periode t.

Deze aantallen zijn uitgedrukt in eenheden van 100 000 mensen. De ontwikkeling van de leeftijdsopbouw verandert per periode van 30 jaar volgens $x(t+1) = Px(t)$ met

$$x(t) = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{van} & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \text{ naar} \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1.4 & 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad \text{verder is} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

(2) *a)* Bereken $x(1)$.

(2) *b)* Wat is de kans dat iemand uit de klasse van 0- tot en met 29-jarigen na een periode van 30 jaar nog leeft?
En wat is de kans dat iemand uit de klasse van 30- tot en met 59-jarigen na een periode van 30 jaar nog leeft?

(3) *c)* Laat zien, dat de vectoren $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eigenvectoren zijn van matrix P. Bepaal de bijbehorende eigenwaarden.

(2) *d)* Op den duur gaat de leeftijdsopbouw van de bevolking steeds meer lijken op een stabiele verdeling. Welk gedeelte van de bevolking behoort dan tot de leeftijdsklasse van 60-jarigen en ouder? Licht je antwoord toe.

(3) *e)* Geef een uitdrukking voor $x(6)$, uitgedrukt in de eigenvectoren u, v en w en de bijbehorende eigenwaarden. Je mag hierbij, indien gewenst, gebruik maken van onderstaand, met een computeralgebraprogramma verkregen, resultaat.

```
> solve([4α + 1β = 70, 2α − 4β = 80, 1α + 7β + 1γ = 50], [α, β, γ])
                                        [[α = 20, β = −10, γ = 100]]
```

Opgave 3.

De onderzoeker uit opgave 2 wil nagaan welke invloed een verlaging van de geboortecijfers heeft op de vergrijzing van de bevolking. Hij veronderstelt nu dat de leeftijdsopbouw per periode van 30 jaar verandert volgens $x(t+1) = Qx(t)$ met

$$Q = \begin{array}{cc} & \text{van} \\ \text{naar} & \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(1) *a)* Aan welk getal is te zien dat iemand uit de klasse van 0- tot en met 29-jarigen nu gemiddeld minder kinderen krijgt dan in het model van opgave 2?

Matrix Q heeft als dominante eigenwaarde 1.2 (dit hoef je niet zelf af te leiden).

(2) *b)* Bepaal een eigenvector van Q bij de eigenwaarde 1.2 .
Welk gedeelte van de bevolking behoort nu op den duur tot de leeftijdsklasse van 60-jarigen en ouder?

ZIE VOLGENDE PAGINA

Opgave 4.

Het Wereldbevolkingsrapport 2007 (uitgave: het VN-bevolkingsfonds, UNFPA) geeft informatie over de verstedelijking van de wereldbevolking. Zo geeft het voor de periode 1950 - 2030 schattingen en voorspellingen voor het percentage van de bevolking dat in stedelijk gebied woont. Het volgende model geeft een beschrijving van deze cijfers voor Latijns Amerika:

$$y'(t) = 0.025(90 - y(t)),$$
$$y(0) = 40;$$

hierin is $y(t)$ het percentage van de bevolking van Latijns Amerika dat in stedelijk gebied woont op tijdstip t (in jaren), waarbij $t = 0$ overeenkomt met 1950.

(2) ***a)*** Bereken de groeisnelheid $y'(0)$. Bereken ook de relatieve groeisnelheid van $y(t)$ voor $t = 0$.

(1) ***b)*** Bepaal het evenwicht van de differentiaalvergelijking.

(4) ***c)*** Laat zien, door de differentiaalvergelijking op te lossen met tussenstappen, dat

$$y(t) = 90 - 50\,\mathrm{e}^{-0.025t} .$$

(2) ***d)*** Hoe groot wordt volgens dit model op den duur het percentage van de bevolking van Latijns Amerika dat in stedelijk gebied woont?
Bereken voor welke waarde van t dit percentage volgens dit model gelijk is aan 80.

Opgave 5.

De functie $f(x, y)$ is gedefinieerd door

$$f(x, y) = x^2 y - 3x^2 - 6y^2 + 3 .$$

(3) ***a)*** Bepaal de partiële afgeleiden $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$, en laat zien dat het punt (6, 3) een stationair punt is van $f(x, y)$.

(2) ***b)*** Bepaal de overige stationaire punten van $f(x, y)$.

(2) ***c)*** Bepaal de aard en de grootte van $f(x, y)$ in het stationaire punt (6, 3).

Een bedrijf maakt een product. Het aantal eenheden product dat het bedrijf maakt bij inzet van x eenheden arbeid en y eenheden kapitaal, wordt gegeven door $10x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

De kosten van x eenheden arbeid en y eenheden kapitaal worden gegeven door $45x + 5y$.

(3) ***d)*** Het bedrijf wil 375 eenheden van het product maken tegen minimale kosten.
Bereken (langs algebraïsche weg) bij welke inzet van arbeid en kapitaal dit wordt bereikt.

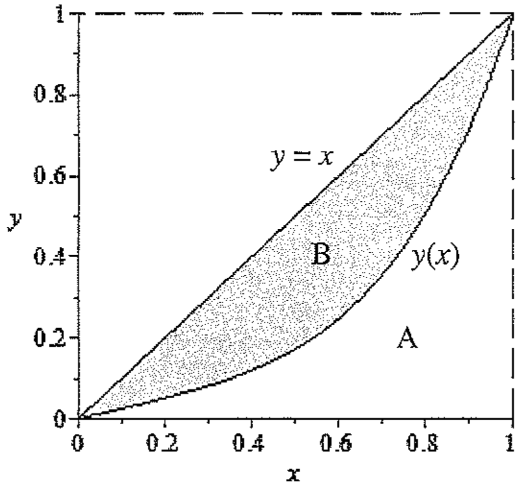
Opgave 6.

Het Ginigetal is een wijd verbreide maat om inkomensongelijkheid te meten.
We beschouwen een land waar de inkomensverdeling beschreven wordt met de Lorentzkromme gegeven door

$$y(x) = \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{4}x \qquad (0 \le x \le 1),$$

zie de figuur. De fractie x van de bevolking met het laagste inkomen verdient dan samen de fractie $y(x)$ van het nationaal inkomen.

(3) *a)* Bereken algebraïsch de oppervlakte tussen de x-as en de Lorentzkromme $y(x)$ (dat is oppervlakte A in de figuur), en ga na dat deze gelijk is aan 0.275.



De oppervlakte tussen de Lorentzkromme en de diagonaal $y = x$ (dat is oppervlakte B in de figuur) is een maat voor de inkomensongelijkheid in het land.
Het Ginigetal wordt nu gedefinieerd als de verhouding tussen die oppervlakte en de totale oppervlakte tussen de x-as en de diagonaal (voor $0 \le x \le 1$).

(2) *b)* Bereken het Ginigetal voor de inkomensverdeling in dit land.